

Foncteurs de Mackey à réciprocité

version préparatoire (1991 ?)

Bruno Kahn

On fixe un corps de base k . On considère des foncteurs de Mackey définis sur la catégorie des k -schémas affines (donc des k -algèbres commutatives) par rapport aux morphismes finis et plats, et commutant aux limites inductives filtrantes (*i.e.* “continus”).

On dit qu’un foncteur de Mackey A est :

- *cohomologique* si, pour tout morphisme fini f de degré constant d , $A_*(f) \circ A^*(f)$ est la multiplication par d ;
- *additif* si, pour tous k -schémas affines X, X' , $(\iota^*, \iota'^*) : A(X) \oplus A(X') \xrightarrow{\sim} A(X \amalg X')$, où ι et ι' sont les inclusions $X \hookrightarrow X \amalg X'$ et $X' \hookrightarrow X \amalg X'$;
- *faiblement additif* si, pour tout k -schéma affine S et tous morphismes finis et plats $f : X \rightarrow S$ et $f' : X' \rightarrow S$, on a (avec les notations ci-dessus) $A_*(f \amalg f') = A_*(f) \circ A^*(\iota) + A_*(f') \circ A^*(\iota')$;
- *topologiquement invariant* si, pour tout morphisme radiciel f , $A^*(f)$ est un isomorphisme ;
- (si A est cohomologique :) *faiblement topologiquement invariant* si, pour toute extension F de k et toute F -algèbre locale artinienne R de longueur d , de corps résiduel l de degré fini sur F , on a $A_*(p_R) = dA_*(p_F) \circ A^*(\iota)$, où p_R (*resp.* p_l) est la projection $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } F$ (*resp.* $\text{Spec } l \rightarrow \text{Spec } F$) et ι est l’immersion fermée $\text{Spec } l \rightarrow \text{Spec } R$.

Il est clair qu’un foncteur de Mackey additif est faiblement additif ; de même :

Lemme 0.1 *Un foncteur de Mackey cohomologique topologiquement invariant est faiblement topologiquement invariant.*

Démonstration. Avec les notations ci-dessus, supposons d’abord l/F radiciel. Par hypothèse, $A^*(p_R)$ est un isomorphisme. La formule à démontrer est donc équivalente à

$$A_*(p_R) \circ A^*(p_R) = dA_*(p_l) \circ A^*(\iota) \circ A^*(p_R),$$

qui est claire.

Supposons maintenant l/F quelconque. Soit l_0 la fermeture séparable de F dans l . Par le lemme de Hensel, l_0 se relève de manière unique dans R au-dessus de F ; autrement dit, il existe un unique $s : \operatorname{Spec} R \rightarrow \operatorname{Spec} l_0$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} l & \xrightarrow{\iota} & \operatorname{Spec} R \\ p' \downarrow & s \swarrow & p_R \downarrow \\ \operatorname{Spec} l_0 & \xrightarrow{p_{l_0}} & \operatorname{Spec} F \end{array}$$

soit commutatif. On a alors :

$$A_*(p_R) = A_*(p_{l_0}) \circ A_*(s)$$

et

$$A_*(s) = dA_*(p') \circ A^*(\iota)$$

d'après le cas radiciel. □

Toutes les courbes sur k sont lisses, mais pas nécessairement complètes ou irréductibles. Si U est un ouvert dense d'une courbe complète X , on considérera toujours $\mathbf{Div}(U)$ comme le groupe des diviseurs de X à support dans U : cela munit \mathbf{Div} d'une structure de foncteur covariant pour les immersions ouvertes.

1 Un accouplement “divisoriel”

Soient A un foncteur de Mackey et U une courbe affine sur k . Pour tout point fermé x de U , on définit l'évaluation en x , $a \mapsto a(x)$, comme le composé

$$A(U) \xrightarrow{\iota_x^*} A(k(x)) \xrightarrow{\operatorname{Cor}_{k(x)/k}} A(k)$$

où ι_x est l'inclusion $x \mapsto U$. On l'étend par linéarité en un accouplement :

$$\begin{array}{ccc} A(U) \times \mathbf{Div}(U) & \rightarrow & A(k) \\ (a, D) & \mapsto & a(D). \end{array} \tag{1}$$

On a le lemme trivial suivant :

Lemme 1.1 *Soient U' un ouvert dense de U , $a \in A(U)$, a' son image dans $A(U')$ et D un diviseur de X à support dans U' . Alors on a $a(D) = a'(D)$. □*

Soit D un diviseur effectif de U , vu comme sous-schéma fermé de U . Soit ι_D l'inclusion de D dans U . On a un morphisme de fonctorialité $\iota_D^* : A(U) \rightarrow A(D)$ et (puisque D est fini sur $\text{Spec } k$) un transfert

$$A(D) \rightarrow A(k)$$

noté abusivement $\text{Cor}_{D/k}$.

Lemme 1.2 *Si A est cohomologique, faiblement additif et faiblement topologiquement invariant, on a pour tout diviseur effectif D et tout $a \in A(U)$:*

$$a(D) = \text{Cor}_{D/k} \iota_D^*(a).$$

Cela résulte du lemme 0.1.

Lemme 1.3 *Soient U et V deux courbes affines sur k et $f : V \rightarrow U$ un morphisme fini de degré n . Supposons A cohomologique. Alors :*

- a) *Pour tout $a \in A(U)$ et tout $D \in \mathbf{Div}(U)$, $(f^*a)(f^*D) = na(D)$.*
- b) *Pour tout $a \in A(U)$ et tout $D \in \mathbf{Div}(V)$, $a(f_*D) = (f^*a)(D)$.*
- c) *Si de plus A est faiblement additif et faiblement topologiquement invariant, on a pour tout $a \in A(V)$ et tout $D \in \mathbf{Div}(U)$, $a(f^*D) = (f_*a)(D)$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer a), b) et c) lorsque D est un point fermé x . Dans le cas a), on écrit $f^*x = \sum e_i y_i$, d'où

$$\begin{aligned} (f^*a)(f^*x) &= \sum e_i (f^*a)(y_i) \\ &= \sum e_i \text{Cor}_{k(y_i)/k} \iota_{y_i}^*(f^*a) \\ &= \sum e_i \text{Cor}_{k(y_i)/k} (f \circ \iota_{y_i})^* a \\ &= \sum e_i \text{Cor}_{k(y_i)/k} \text{Res}_{k(y_i)/k(x)} \iota_x^* a \\ &= \sum e_i [k(y_i) : k(x)] \text{Cor}_{k(x)/k} \iota_x^* a \\ &= n \text{Cor}_{k(x)/k} \iota_x^* a \\ &= na(x). \end{aligned}$$

(On a utilisé la formule $\sum e_i [k(y_i) : k(x)] = n$.)

Dans le cas b), on a $f_*(x) = [k(x) : k(y)]y$, où $y = f(x)$, et

$$\begin{aligned} (f^*a)(x) &= \text{Cor}_{k(x)/k} \iota_x^* f^* a \\ &= \text{Cor}_{k(x)/k} (f \circ \iota_x)^* a \\ &= \text{Cor}_{k(x)/k} \iota_y^* a \\ &= [k(x) : k(y)] \text{Cor}_{k(y)/k} \iota_y^* a \\ &= a(f_*(x)), \end{aligned}$$

puisque A est cohomologique.

Pour c), notons Δ le diviseur effectif f^*x , ι_Δ l'inclusion de Δ dans U et f' la restriction de f à Δ . On a alors :

$$\iota_x^* f_* a = f'_* \iota_\Delta^* a$$

donc

$$\begin{aligned} (f_* a)(x) &= \text{Cor}_{k(x)/k} \iota_x^* f_* a \\ &= \text{Cor}_{k(x)/k} f'_* \iota_\Delta^* (a) \\ &= \text{Cor}_{\Delta/k} \iota_\Delta^* (a) \\ &= a(\Delta) \end{aligned}$$

d'après le lemme 1.2.

Remarque. Le lemme 1.3 peut s'interpréter de la manière suivante : sous les hypothèses de b), l'accouplement (i) se prolonge en un homomorphisme

$$ev : A \otimes^M \mathbf{Div} \rightarrow A(k)$$

du foncteur de Mackey $A \otimes^M \mathbf{Div}$ vers le foncteur de Mackey constant de valeur $A(k)$.

2 Topologie modulaire

Soient U une courbe affine (lisse) sur k , X sa complétée et Z le fermé complémentaire. Un *module* sur U est un diviseur effectif de X , de support Z . Si \mathfrak{m} est un module sur U , on lui associe un sous-groupe $\mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U)$ de $\mathbf{Div}(U)$:

$$\mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U) = \{(f) | f \in k(X)^*; \text{ pour tout } x \in Z, v_x(f - 1) \geq v_x(D)\}.$$

Les $\mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U)$ forment une base de voisinages de 0 pour une topologie sur $\mathbf{Div}(U)$: la *topologie modulaire*. Si $\mathfrak{m} = \sum_{x \in Z} x$, le quotient $\mathbf{Div}(U) / \mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U)$ s'identifie au groupe de Picard relatif $\mathbf{Pic}(X, Z)$.

Si x est un point fermé de X , on note $\hat{\mathcal{O}}_x$ le complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ et \hat{K}_x le corps des fractions de $\hat{\mathcal{O}}_x$.

Définition 2.1 *Le groupe des idèles $\mathcal{I}(X)$ de X est le produit direct restreint des \hat{K}_x^* relativement aux \hat{O}_x^* . Le groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}(X)$ de X est le quotient de $\mathcal{I}(X)$ par le sous-groupe image de $k(X)^*$ par le plongement diagonal.*

Le lemme suivant est bien connu :

Lemme 2.1 *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{C}(X) \simeq \varprojlim \mathbf{Div}(U) / \mathbf{Div}^m(U),$$

où U parcourt les ouverts affines de X et \mathfrak{m} parcourt les modules sur U .

3 Foncteurs de Mackey à réciprocité

Définition 3.1 *Soient A un foncteur de Mackey, u une courbe affine (lisse) sur k , $a \in A(U)$ et \mathfrak{m} un module sur U . On dit que a admet le module \mathfrak{m} si la restriction de l'application $\mathbf{Div}(U) \rightarrow A(F)$ induite par a à $\mathbf{Div}^m(U)$ est identiquement nulle.*

Définition 3.2 *Soient A un foncteur de Mackey et U une courbe affine (lisse) sur k . On dit que A vérifie la k -réciprocité sur U si l'accouplement (1) est continu pour la topologie modulaire sur $\mathbf{Div}(U)$ et la topologie discrète sur $A(U)$ et $A(k)$. On dit que A vérifie la k -réciprocité forte sur U si, de plus, l'accouplement $A(U) \times \mathbf{Div}(U) \rightarrow A(k)$ restreint à $A(U) \times \mathbf{Div}^m(U)$ est identiquement nul pour $\mathfrak{m} = \sum_{x \in Z} x$.*

On dit que A vérifie la k -réciprocité (resp. vérifie la k -réciprocité forte) s'il la vérifie sur toute courbe U sur k .

On dit que A vérifie la réciprocité (resp. vérifie la réciprocité forte) s'il vérifie la l -réciprocité (resp. la l -réciprocité forte) pour toute extension finie l de k .

Remarque. Supposons k algébriquement clos. Dans la terminologie de [1, ch. III], la définition de la k -réciprocité signifie que, pour tout $a \in A(U)$, l'application $x \mapsto a(x)$ de U dans $A(k)$ possède un module.

Lemme 3.1 *Supposons A cohomologique, faiblement additif et faiblement topologiquement invariant. Pour que A vérifie la k -réciprocité forte, il faut et il suffit qu'il soit k -invariant par homotopie, i.e. que $A(k) \xrightarrow{\sim} A(\mathbf{A}_k^1)$.*

En effet, supposons que A vérifie la k -réciprocité forte. Prenons $U = \mathbf{A}_k^1$. On a alors $X = \mathbf{P}_k^1$ et $\mathbf{Pic}(\mathbf{P}_k^1, \{\infty\}) = \mathbf{Z}$. Soient $a \in A(U)$ et $a_0 = a(0)$: on peut voir a_0 comme un élément de $A(U)$ via l'homomorphisme $A(k) \rightarrow A(U)$ déduit du morphisme structural. Montrons que $a = a_0$: cela montrera que $A(k) \rightarrow A(U)$ est surjectif, donc bijectif puisque c'est *a priori* une injection scindée. Quitte à remplacer a par $a - a_0$ on peut supposer $a_0 = 0$. Soit x un point fermé de U , de degré d : il existe une (unique) fonction rationnelle $f \in k(U)^*$ telle que $(f) = x - d0$ et que $f(\infty) = 1$ (c'est $f(t) = P(t)/t^d$, où P est le polynôme minimal de x). Par hypothèse, on a $0 = a((f)) = a(x) - da(0) = a(x)$.

Supposons maintenant A invariant par homotopie. Soient U une courbe affine et irréductible sur k , X sa complétée, $a \in A(U)$ et $f \in k(X)^*$ une fonction rationnelle (supposée non constante), telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \notin U$. Considérons f comme un morphisme (fini et plat) de X dans \mathbf{P}_k^1 , donc comme un morphisme fini et plat d'un ouvert U' de U dans $\mathbf{P}_k^1 - \{1\}$. On a alors $(f) = f^*(0 - \infty)$, donc d'après les lemmes 1.1 et 1.3 :

$$a((f)) = a'((f)) = a'(f^*(0 - \infty)) = (f_*a')(0 - \infty),$$

où a' est l'image de a dans U' . En appliquant l'invariance par homotopie à $\mathbf{P}_k^1 - \{1\} \simeq \mathbf{A}_k^1$, on trouve $(f_*a')(0 - \infty) = 0$, donc $a((f)) = 0$.

Question. Est-il vrai que A vérifie la k -réciprocité si et seulement si il la vérifie sur les ouverts de \mathbf{P}_k^1 ? (c.f. [1, ch III, prop. 9]).

Définition 3.3 *On dit qu'un foncteur de Mackey A vérifie la réciprocité (resp. la réciprocité forte) s'il vérifie la l -réciprocité (resp. la l -réciprocité forte) pour toute extension finie l de k .*

4 Réciprocité et symboles locaux

Définition 4.1 *Soit A un foncteur de Mackey. Un symbole local associé à A est la donnée ∂ , pour toute k -algèbre de valuation discrète d'origine géométrique \mathcal{O} , de corps résiduel l algébrique sur k et de corps des fractions*

K , d'un accouplement $\partial_{\mathcal{O}} : A(K) \times K^* \rightarrow A(l)$ ayant les propriétés suivantes :
(i) $\partial_{\mathcal{O}}$ est continu pour la topologie naturelle de K^* et pour les topologies discrètes de $A(K)$ et $A(l)$.

(ii) Soient a un élément de $A(\mathcal{O})$, a' son image dans $A(K)$ et \bar{a} son image dans $A(l)$. Alors, pour tout $x \in K^*$, on a $\partial_{\mathcal{O}}(a', x) = v(x)\bar{a}$, où v est la valuation associée à \mathcal{O} .

(iii) Soit \mathcal{O}' une extension finie, intégralement close de \mathcal{O} : c'est un anneau principal semi-local. Soient K' son corps des fractions, \mathcal{O}_i les localisés de \mathcal{O}' en ses idéaux maximaux, l_i le corps résiduel de \mathcal{O}_i , e_i l'indice de ramification de $\mathcal{O}_i/\mathcal{O}$. Alors :

(iii1) Pour $(a, x) \in A(K) \times K^*$ et pour tout i ,

$$\partial_{\mathcal{O}_i}(\text{Res}_{K'/K} a, x) = e_i \text{Res}_{l_i/l} \partial_{\mathcal{O}}(a, x);$$

(iii2) Pour $(a, x) \in A(K) \times K^*$,

$$\partial_{\mathcal{O}}(a, N_{K'/K} x) = \sum \text{Cor}_{l_i/l} \partial_{\mathcal{O}_i}(\text{Res}_{K'/K} a, x);$$

(iii3) Pour $(a, x) \in A(K') \times K^*$,

$$\partial_{\mathcal{O}}(\text{Cor}_{K'/K} a, x) = \sum \text{Cor}_{l_i/l} \partial_{\mathcal{O}_i}(a, x).$$

On dit que ∂ est un symbole local fort s'il vérifie la condition suivante (qui implique (i)) :

(i) fort : $\partial_{\mathcal{O}}$ est nul sur $A(K) \times U_1$, où U_1 désigne le groupe des unités principales de \mathcal{O} .

Remarques.

1. L'existence d'un symbole local impose des restrictions sur la structure de groupe abélien des valeurs de A . Par exemple, la propriété (ii) implique que l'application naturelle $A(\mathcal{O}) \rightarrow A(l)$ peut se prolonger à $A(K)$.
2. Les conditions (iii) impliquent que $\partial_{\mathcal{O}}$ se prolonge en un homomorphisme (encore noté) $\partial_{\mathcal{O}} : A \otimes^M \mathbf{G}_m(K) \rightarrow A(l)$, ayant les propriétés suivantes (sous les hypothèses de (iii)) :

(iii1) bis : Pour tout $b \in A \otimes^M \mathbf{G}_m(K)$ et pour tout i , $\partial_{\mathcal{O}_i}(\text{Res}_{K'/K} b) = e_i \text{Res}_{l_i/l} \partial_{\mathcal{O}}(b)$;

(iii2) bis : Pour tout $b \in A \otimes^M \mathbf{G}_m(K')$, $\partial_{\mathcal{O}}(\text{Cor}_{K'/K} b) = \sum \text{Cor}_{l_i/l} \partial_{\mathcal{O}_i}(b)$.

Lemme 4.1 *Pour se donner un symbole local (resp. un symbole local fort), il suffit de se donner une famille d'accouplements $\partial_{\mathcal{O}}$ ayant les propriétés (i)-(iii) (resp. (i) fort-(iii)) pour \mathcal{O} parcourant les k -algèbres de valuation discrète henséliennes [d'origine géométrique] dont le corps résiduel est fini sur k .*

Supposons donnée une telle famille. Soit \mathcal{O} une k -algèbre de valuation discrète d'origine géométrique, de corps résiduel l et de corps de fractions K . Soient \mathcal{O}^h la hensélisée de \mathcal{O} (de corps résiduel l) et K^h le corps des fractions de \mathcal{O}^h . On définit $\partial_{\mathcal{O}}$ comme le composé :

$$A(K) \times K^* \rightarrow A(K^h) \times K^{h*} \rightarrow A(l),$$

l'application de droite étant $\partial_{\mathcal{O}^h}$. On vérifie sans peine que les propriétés (i)–(iii) sont vérifiées.

Théorème 4.1 *Soit A un foncteur de Mackey cohomologique, faiblement additif et faiblement topologiquement invariant. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) A vérifie la réciprocité (resp. la réciprocité forte).*
- b) A possède un symbole local (resp. un symbole local fort) ∂ , vérifiant la condition suivante : pour toute extension finie l de k , toute courbe X lisse, complète, irréductible sur l , de corps des fonctions K , et tout $(a, f) \in A(K) \times K^*$, on a*

$$\sum \text{Cor}_{l(x)/l} \partial_x(a, f) = 0,$$

où x parcourt les points fermés de X et, pour tout x , ∂_x est le symbole local associé à $\mathcal{O}_{X,x}$. De plus, sous ces conditions, le symbole local ∂ est unique.

Démonstration. Montrons que b) \Rightarrow a). Soient U un ouvert affine non vide de X , $a \in A(U)$ et a' l'image de a dans $A(K)$. Pour tout $x \in U$ et tout $f \in K^*$, on a (propriété (ii) de la définition 4.1) :

$$\partial_x(a', f) = v_x(f) \iota_x^* a.$$

En particulier, supposons que (f) soit à support dans U . Alors

$$\sum_{x \in U} \text{Cor}_{k(x)/k} \partial_x(a, f) = \sum_{x \in U} v_x(f) \text{Cor}_{k(x)/k} \iota_x^* a = a((f)).$$

Par la propriété (i) de la définition 4.1, il existe un module \mathbf{m} pour U tel que, si $(f) \in \mathbf{Div}^{\mathbf{m}}(U)$, on ait $\partial_x(a, f) = 0$ pour tout $x \notin U$. On a alors :

$$a((f)) = \sum_{x \in U} \text{Cor}_{k(x)/k} \partial_x(a, f) = \sum_{x \in X} \text{Cor}_{k(x)/k} \partial_x(a, f) = 0,$$

donc l'accouplement (1) est continu pour la topologie modulaire. Si ∂ est un symbole local fort, on peut choisir ci-dessus $\mathbf{m} = \sum_{x \notin U} x$, donc A vérifie la k -réciprocité forte.

Montrons que a) \Rightarrow b). Comme A est continu, on a $A(K) = \varinjlim A(U)$, où U décrit les ouverts non vides de X . Grâce au lemme 2.1, on obtient donc un accouplement continu :

$$A(K) \times \mathcal{C}(X) \rightarrow A(k).$$

Soit x un point fermé de X . Par restriction à (l'image de) \hat{K}_x^* , on obtient un accouplement local continu :

$$\delta_x : A(K) \times \hat{K}_x^* \rightarrow A(k),$$

tel que $\delta_x(a, f) = v_x(f)a(x)$ si a "provient de $\mathcal{O}_{X,x}$ ". D'où encore par restriction un autre accouplement local continu

$$A(K) \times K_x^{h*} \rightarrow A(k),$$

où K_x^h est le hensélisé de K en x .

Choisissons $X = \mathbf{P}_k^1$, $x = 0$. Alors \hat{K}_x est le corps des séries formelles $k((t))$, et K_x^h est le sous-corps $k\{\{t\}\}$ des séries formelles algébriques sur k , corps des fractions du hensélisé $k \ll t \gg$ de $k[t]$ en 0. Soit $Y \rightarrow X$ un revêtement non ramifié et décomposé en x , et soit y un point de Y au-dessus de x , de corps résiduel k . Si L est le corps des fonctions de Y , on a $K_x^h \xrightarrow{\sim} L_y^h$, et le lemme 1.3 b) montre que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A(L) & \times & L_y^{h*} & \rightarrow & A(k) \\ & & \uparrow & & \parallel \\ A(K) & \times & K_x^{h*} & \rightarrow & A(k) \end{array}$$

est commutatif. En passant à la limite, on obtient un accouplement continu

$$\partial_{k \ll t \gg} : A(k\{\{t\}\}) \times k\{\{t\}\}^* \rightarrow A(k),$$

ayant la propriété (ii) de la déf. 4.1 (observer que $k\{\{t\}\} = \varinjlim k(Y)$, où Y parcourt les revêtements de \mathbf{P}_k^1 du type ci-dessus).

En répétant cette opération avec pour base une extension finie arbitraire l de k et en tenant compte du lemme 4.1, on obtient un symbole local : en effet, toute k -algèbre de valuation discrète hensélienne, de corps résiduel l est de la forme $l \ll t \gg$ (on vérifie facilement les propriétés (iii) de la définition 4.1 à l'aide du lemme 1.3). Reste à vérifier la formule du th. 4.1 b). On peut supposer $l = k$. Avec les notations ci-dessus, $(a, f) \in A(K) \times K^*$ et $x \in X$, on a :

$$\delta_x(a, f) = \text{Cor}_{k(x)/k} \partial_x(a, f).$$

On en déduit :

$$\sum_{x \in X} \text{Cor}_{k(x)/k} \partial_x(a, f) = \sum_{x \in X} \delta_x(a, f) = 0,$$

puisque la classe de f est triviale dans $\mathcal{C}(X)$.

Enfin, l'unicité du symbole ∂ résulte de la démonstration de b) \Rightarrow a).

5 Exemples de foncteurs à réciprocity

Définition 5.1 *Un foncteur de Mackey A est propre si, pour toute k -algèbre de valuation discrète \mathcal{O} , de corps des fractions K , $A(\mathcal{O}) \rightarrow A(K)$ est surjective.*

Proposition 5.1 *Soit A un foncteur de Mackey propre. Pour que A puisse être muni d'un symbole local ∂ , il faut et il suffit que, pour toute k -algèbre de valuation discrète hensélienne \mathcal{O} , de corps des fractions K et de corps résiduel l , l'application $\text{Ker}(A(\mathcal{O}) \rightarrow A(K)) \rightarrow A(l)$ soit identiquement nulle. Le symbole ∂ est alors unique, et donné par $\partial_{\mathcal{O}}(a, x) = v(x)\bar{a}$ (notations de la déf. 4.1) ; il est fort.*

Cela résulte immédiatement de la propriété (ii) de la déf. 4.1.

Corollaire 5.1 *Soit A un foncteur de Mackey propre, cohomologique, faiblement additif et faiblement topologiquement invariant. Pour que A vérifie la réciprocité, il faut et il suffit qu'il soit invariant par homotopie.*

Cela résulte de la prop. 5.1 et du lemme 3.1.

Les deux lemmes suivants ne présentent aucune difficulté.

Lemme 5.1 *Soient A et B deux foncteurs de Mackey.*

- a) Si A et B vérifient la réciprocité (resp. la réciprocité forte), il en est de même pour $A \oplus B$.*
- b) Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de foncteurs de Mackey.*
 - b1) Si φ est surjectif et si A vérifie la réciprocité (resp. . .), il en est de même pour B .*
 - b2) Si $A(k) \rightarrow B(k)$ est injectif et si B vérifie la réciprocité (resp. . .), il en est de même pour A .*

Lemme 5.2 *Soient (A_i) un système inductif de foncteurs de Mackey et $A = \varinjlim A_i$. Si les A_i vérifient la réciprocité (resp. . .), il en est de même pour A .*

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de foncteurs de Mackey. Si A et C vérifient la réciprocité, j'ignore s'il en est de même en général pour B . C'est cependant le cas si A et C vérifient la réciprocité forte :

Proposition 5.2 *Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de foncteurs de Mackey cohomologiques, faiblement additifs et faiblement topologiquement invariants. Si A et C vérifient la k -réciprocité forte, il en est de même pour B .*

En effet, d'après le lemme 3.1, A et C sont invariants par homotopie. Le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & A(k) & \rightarrow & B(k) & \rightarrow & C(k) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & A(\mathbf{A}_k^1) & \rightarrow & B(\mathbf{A}_k^1) & \rightarrow & C(\mathbf{A}_k^1) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

montre alors que B est invariant par homotopie.

Théorème 5.1 (Rosenlicht) *Un foncteur de Mackey défini par un groupe algébrique commutatif (resp. par une variété semi-abélienne) vérifie la réciprocity (resp. la réciprocity forte).*

Démonstration. Si k est algébriquement clos, cela résulte de [1, ch. III]. En général, soient A un groupe algébrique commutatif, U une courbe affine sur k et $a \in A(U)$. Soient X la complétée de U et $Z = X - U$. Soient \bar{k} une clôture algébrique de k , $\bar{U} = U \otimes_k \bar{k}$, et $\bar{Z} = Z \otimes_k \bar{k}$. Notons a' l'image de a dans $A(\bar{U})$. Il existe un module $\bar{\mathbf{m}}$ de support \bar{Z} tel que $a'(\mathbf{Div}^{\bar{\mathbf{m}}}(\bar{U})) = 0$. Soit $\bar{\mathbf{m}}'$ le saturé de $\bar{\mathbf{m}}$ pour l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$: si p est l'exposant caractéristique de k , il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\mathbf{m} = p^n \bar{\mathbf{m}}'$ soit rationnel sur k . A fortiori, on a $a'(\mathbf{Div}^{\mathbf{m}}(\bar{U})) = 0$, d'où $a(\mathbf{Div}^{\mathbf{m}}(U)) = 0$ (lemme 1.3 b)).

Supposons maintenant que A soit une variété semi-abélienne, c'est-à-dire une extension d'une variété abélienne par un tore. Alors A est invariant par homotopie, donc vérifie la réciprocity forte d'après le lemme 3.1.

Théorème 5.2 *Soit C^\bullet un complexe borné à gauche de faisceaux de groupes abéliens sur le grand site étale de $\text{Spec } k$. Supposons que les faisceaux d'homologie de C^\bullet soient de torsion première à la caractéristique de k . Alors, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, le foncteur de Mackey $X \mapsto \mathbb{H}^i(X_{\text{ét}}, C^\bullet)$ vérifie la réciprocity forte.*

En effet, il suffit de montrer que ce foncteur de Mackey est cohomologique, additif, topologiquement invariant et invariant par homotopie (lemme 3.1). L'additivité est évidente. Pour le reste, supposons d'abord C^\bullet concentré en degré zéro : cela résulte alors de [SGA 4 XVII (6.2.3), VIII (1.1.2), XV (2.2.2)]. Le cas général résulte de celui-ci et de la suite spectrale d'hypercohomologie.

Théorème 5.3 *Soient X une variété lisse sur k et i, j deux entiers ≥ 0 . Notons A le foncteur de Mackey défini par $A(Y) = H^i((X \times_k Y)_{\text{zar}}, \mathcal{K}_j)$. Alors A vérifie la réciprocity forte.*

En effet, A est cohomologique, additif, topologiquement invariant et invariant par homotopie ([...]).

Corollaire 5.2 *Avec les notations du th. 5.3, $Y \mapsto CH^i(X \times_k Y)$ vérifie la réciprocité forte.*

C'est le cas particulier $j = i$ ($[\dots]$).

Théorème 5.4 *Pour tout $i \geq 0$, le foncteur de Mackey $Y \mapsto \Omega_{X/\mathbf{Z}}^i$ vérifie la réciprocité (mais non la réciprocité forte).*

Démonstration.

6 Produits tensoriels

Soient (A, ∂) et (B, ∂') deux foncteurs de Mackey munis de symboles locaux. On aimerait munir $A \overset{M}{\otimes} B$ d'un symbole local $\partial'' = \partial \otimes \partial'$. Si \mathcal{O} est une k -algèbre de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel l , et si π est une uniformisante de \mathcal{O} , on interprète les homomorphismes

$$s_\pi : A(K) \rightarrow A(l)$$

$$s'_\pi : B(K) \rightarrow B(l)$$

donnés par $s_\pi(a) = \partial_{\mathcal{O}}(a, \pi)$, $s'_\pi(b) = \partial'_{\mathcal{O}}(b, \pi)$, comme des homomorphismes de spécialisation. On désire alors définir ∂'' de telle sorte que, en posant $s''_\pi(c) = \partial''_{\mathcal{O}}(c, \pi)$, on ait identiquement (pour toute uniformisante π) :

$$s''_\pi(a \otimes b) = s_\pi(a) \otimes s'_\pi(b).$$

Ceci impose des relations sur les $s_\pi(a) \otimes s'_\pi(b)$, qui en général ne sont pas vérifiées. On est donc conduit à quotienter le foncteur $A \overset{M}{\otimes} B$ par ces nouvelles relations.

Références

- [1] J-P. Serre Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, Paris, 1959.